可約な概均質ベクトル空間の一例(概均質ベクトル空間とその周辺 : 新谷卓郎特集号)

笠井, 伸一

数理解析研究所講究録
497巻 1983年 190-200

可約な概均質ベクトル空間の一例

筑波大学大学院修士
笠井 伸一

V を $\mathbb{C}$（=複素数体）上の有限次元ベクトル空間，G を $\mathbb{C}$ 上の連結線型代数群，$\rho : G \to GL(V)$ を有限次元複素有理表現とする．(G, ρ, V) が概均質ベクトル空間（以下 P. V. と記す）であるとは，G が V 上 Zariski-dense orbit をもつことをいう．

この小論では次の結果を示すことを目的とする．

G を任意の単純群，ρ を G の任意の表現（$\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_k$，$V(m) = V(m_1) \oplus \cdots \oplus V(m_k)$，$\rho_i : G \to GL(V(m_i))$ $(i = 1, \cdots, k)$ は G の $V(m_i)$ 上の任意の既約表現，$\rho_i \neq 1$，$k \geqq 1$）とする．

定理.

☆ $(GL(1)^{1+k} \times SL(2n+1) \times G,\ \square \otimes \rho \oplus \text{日} \otimes 1,$

$V(2n+1) \otimes V(m) \oplus V(n(2n+1)) \otimes V(1))$，$2n+1 \geqq m$

が概均質ベクトル空間であるためには，次の①，②，③のうちのどれかであることが必要十分である．

① $(GL(1)^2 \times SL(2n+1) \times SL(m),\ \square \otimes \square \oplus \text{日} \otimes 1,$

$V(2n+1) \otimes V(m) \oplus V(n(2n+1)) \otimes V(1))\quad (1 \leq m \leq 2n+1)$

② $(GL(1)^2 \times SL(2n+1) \times Sp(m),\ \square \otimes \square \oplus \text{日} \otimes 1,$

$V(2n+1) \otimes V(2m) \oplus V(n(2n+1)) \otimes V(1))\quad (1 \leq 2m \leq 2n+1)$

③ $(GL(1)^2 \times SL(2n+1) \times SO(4),\ \square \otimes \square \oplus \text{日} \otimes 1,$

$V(2n+1) \otimes V(4) \oplus V(n(2n+1)) \otimes V(1))\quad (4 \leq 2n+1)$

□，日はそのYoung図形に対応する既約表現をあらわすものとする．また$GL(1)^{1+k}$の作用を記さないが，$GL(1)^{1+k}$は各既約成分のスカラー倍として作用しているものとする．（以下でも同様．）

G_1，G_2を単純群，$G = GL(1)^l \times G_1 \times G_2$，$\rho_i : G \to GL(V_i)$ $(i = 1, \dots, l)$ をGの既約表現，$\rho = \rho_1 \oplus \cdots \oplus \rho_l$，$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_l$とするとき，$(GL(1)^l \times G, \rho, V)$がP.V.ならば各$(GL(1) \times G, \rho_i, V_i)$ $(i = 1, \dots, l)$は既約P.V.ゆえに$(GL(1) \times G, \rho_i, V_i)$は（Sato-Kimura [1]）で得られた既約P.V.の表に表われる．しかし$(GL(1) \times G, \rho_i, V_i)$がtrivial P.V.，すなわち$(GL(1) \times G_1 \times GL(n), \rho_i^{(1)} \otimes \square, V_i^{(1)}(m) \otimes V(n))$; $m \leq n$; であれば，G_1として任意の単純群，$\rho_i^{(1)}$として任意の既約表現が可能である．

以下 triplet ☆ が P.V. となるような (G , ρ , V) を決定する。

triplet ☆ の P.V. 性に関して保倉理美氏が次の事を示した（くわしい事は本講究録の保倉氏のところを参照のこと）。

命題（保倉）

$(SL(2m+1) \times G \times GL(1)^{1+k},\ □ \otimes \rho \oplus 日 \otimes 1,$

$\quad V(2m+1) \otimes V(m) \oplus V(m(2m+1)) \otimes V(1)) :$ P.V.

$\Leftrightarrow\ (SL(m-1) \times (G \times Sp(m)) \times GL(1)^{1+k},\ □ \otimes (\rho^* \oplus □),$

$\quad V(m-1) \otimes (V(m)^* \oplus V(2m))) :$ P.V.

この命題により☆が P.V. となるためには，$(SL(m-1) \times G \times GL(1)^k,\ □ \otimes \rho^*,\ V(m-1) \otimes V(m)^*)$ が P.V. でなければならない。したがって裏返し変換により $(G \times GL(1)^k,\ \rho,\ V(m))$ が P.V.，すなわち Simple P.V. でなければならない。

Simple P.V. の表

I. Simple Irred. P.V.（スカラー倍を除いて書いてある）

（Sato-Kimura [1]）

(1) $\underset{□}{SL(n)}$ $(n \geqq 2)$，(2) $\underset{□□}{SL(n)}$ $(n \geqq 2)$，(3) $\underset{日}{SL(n)}$ $(n \geqq 4)$，

(4) $\underset{□□□}{SL(2)}$，(5) $\underset{日}{SL(n)}$ $(n = 6, 7, 8)$，(6) $\underset{□}{Sp(n)}$ $(n \geqq 2)$，

(7) $Sp(3)$ 目 , (8) $SO(n)$ □ $(n \geqq 4)$, (9) $Spin(n)$ (半)スピン表現 $(n=7, 9, 10, 11, 12, 14)$

(10) (G_2) $V(7)$, (11) E_6 $V(27)$, (12) E_7 $V(56)$.

II. Simple P. V. (既約なものを除く) (Kimura [2])

(1) $SL(n)$ $\underbrace{□ + \cdots + □}_{k}$ $(2 \leqq k \leqq n+1)$, (2) $SL(n)$ $\underbrace{□ + \cdots + □}_{k}$ + □* $(1 \leqq k \leqq n)$,

(3) $SL(2m)$ 日 + $\underbrace{□^{(*)} + \cdots + □^{(*)}}_{k}$ $(1 \leqq k \leqq 3)$ 9 通り, (4) $SL(2m+1)$ 日 + □$^{(*)}$ + ⋯ + □$^{(*)}$ $(1 \leqq k \leqq 3)$ 8 通り

(日 + □ + □ + □* を除く)

(5) $SL(2m+1)$ 日 + 日 $(m \geqq 2)$, (6) $SL(n)$ □□ + □$^{(*)}$

(7) $SL(6)$ 目 + □ , 目 + □ + □ , (8) $SL(7)$ 目 + □$^{(*)}$

(9) $Sp(n)$ □ + □ , □ + □ + □ , (10) $Sp(3)$ 目 + □

(11) $Spin(n)$ $(n = 7, 8, 10, 12)$ ベクトル表現 ⊕ (半)スピン表現 , (12) $Spin(10)$ 偶半スピン表現 ⊕ 偶半スピン表現

($GL(1)^k \times G$, ρ, $V(m)$) を Simple P. V., G' をその generic isotropy subgroup とする. このとき ($SL(m-1) \times (G \times Sp(n))$ $\times GL(1)^{1+k}$, □ ⊗ (ρ^* ⊕ □) , $V(m-1) \otimes (V(m)^* \oplus V(2n))$) が P.

V. であることは，$\square\otimes\rho^*$ における generic isotropy subgroup の作用を考えることにより，$(G'\times Sp(m)\times GL(1),\ \square\otimes\square,\ V(m-1)\otimes V(2m))$ が P.V. であることと同値であり，$m-1\leqq 2m$ に注意すれば (Sato-Kimura[1], p. 40, Prop. 13 より) これは $(G'\times GL(1),\ \Lambda^2\square,\ V(\frac{(m-1)(m-2)}{2}))$ が P.V. であることと同値である．これの群の次元を $g'=\dim G'+1$，表現空間の次元を $v'=\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ とおくとき，$(G,\ \rho,\ V)$ が P.V. ならば $\dim G\geqq\dim V$ が成り立つことより，$g'\geqq v'$ となるような Simple P.V. $(GL(1)^k\times G,\ \rho,\ V(m))$ を求めると次の3つに限ることがわかる．

① $(GL(1)\times SL(m),\ \square,\ V(m))$ $(m\geqq 1)$

② $(GL(1)\times Sp(m),\ \square,\ V(2m))$ $(m\geqq 1)$

③ $(GL(1)\times SO(m),\ \square,\ V(m))$ $(m\geqq 4)$．

結局次の3つが P.V. であるかどうかを調べればよい．

① $(SL(2n+1)\times SL(m)\times GL(1)^2,\ \square\otimes\square\oplus 日\otimes 1,$
$V(2n+1)\otimes V(m)\oplus V(n(2n+1))\otimes V(1))$ $(1\leqq m\leqq 2n+1)$

② $(Sp(m)\times SL(2n+1)\times GL(1)^2,\ \square\otimes\square\oplus 1\otimes 日,$
$V(2m)\otimes V(2n+1)\oplus V(1)\otimes V(n(2n+1)))$ $(1\leqq 2m\leqq 2n+1)$

③ $(SL(2n+1)\times SO(m)\times GL(1)^2,\ \square\otimes\square\oplus 日\otimes 1,$
$V(2n+1)\otimes V(m)\oplus V(n(2n+1))\otimes V(1))$ $(4\leqq m\leqq 2n+1)$

以下では g は群の次元をあらわし，v は表現空間の次元をあ

らわすものとする．

① $\left(SL(2n+1) \times SL(m) \times GL(1)^2,\ \square \otimes \square \oplus 日 \otimes 1,\right.$

$\left. V(2n+1) \otimes V(m) \oplus V(n(2n+1)) \otimes V(1) \right) \quad (1 \leq m \leq 2n+1)$

これの P. V. 性は日 $\otimes$ 1 における generic isotropy subgroup を考えることにより次の P. V. 性を調べることに帰着される．

$$\left(\begin{bmatrix} Sp(n) & * \\ \square & \vdots \\ & * \\ 0 & * \end{bmatrix} \times GL(m),\ \square \otimes \square,\ V(2n+1) \otimes V(m) \right)$$

(i) $m = 2l$ のとき．

$$X_0 = {}^t\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overbrace{\qquad\quad}^{n} & \overbrace{\qquad\quad}^{n} & \overbrace{\ }^{1} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c} I_l & & \\ \hline & I_l & \\ & & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \}\, l \\ \}\, l-1 \\ \}\, 1 \end{array}$$

$\in V(2n+1) \otimes V(2l)$ における isotropy subalgebra を計算してみると，

$$\begin{array}{ccccccc} l-1 & 1 & n-l & l-1 & 1 & n-l & 1 \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} A_1 & & & B_1 & B_{12} & & D_1 \\ \hline A_{21} & A_2 & -{}^tD_6 & {}^tB_{12} & B_2 & -{}^tD_3 & D_2 \\ \hline & & A_3 & & -D_3 & B_3 & D_3 \\ \hline C_1 & & & -{}^tA_1 & -{}^tA_{21} & & D_4 \\ \hline & & & & -{}^tA_2 & & D_5 \\ \hline & & C_3 & & D_6 & -{}^tA_3 & D_6 \\ \hline & & & & & & D_5 - A_2 \end{array}\right] \oplus \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} l-1 & 1 & l-1 & 1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c} -{}^tA_1 & -{}^tA_{21} & -{}^tC_1 & \\ \hline & -{}^tA_2 & & \\ \hline -{}^tB_1 & -B_{12} & A_1 & \\ \hline -{}^tB_{12} - {}^tD_1 & -{}^tB_2 - {}^tD_2 & A_{21} - {}^tD_4 & A_2 - {}^tD_5 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\cong (\mathfrak{sp}(l-1) \oplus \mathfrak{sp}(n-l)) \cdot \mathfrak{n}(2(n+l)).$$

$\mathfrak{g} - V = \dim((\mathfrak{sp}(l-1) \oplus \mathfrak{sp}(n-l)) \cdot \mathfrak{n}(2(n+l)))$ が成り立つから，(i) の場合上の triplet は P. V. である．

(ii) $m = 2l + 1$ のとき．

$$X_0 = {}^t\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overbrace{}^{n} & \overbrace{\phantom{I_{l+1}\ \ }}^{n} & \overbrace{}^{1} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c} I_l & & \\ \hline & I_{l+1} & \\ & & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \}\, l \\ \}\, l \\ \}\, 1 \end{array} \in V(2n+1)\otimes V(2l+1)$$

における isotropy subalgebra を計算してみると,

$$\begin{array}{ccccccc} l & 1 & n-l-1 & l & 1 & n-l-1 & 1 \\ \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} A_1 & & & B_1 & & & D_1 \\ \hline & A_2 & A_{23} & & B_2 & B_{12} & -B_2 \\ \hline & A_{32} & A_3 & & {}^tB_{12} & B_3 & -{}^tB_{12} \\ \hline C_1 & & & -{}^tA_1 & & & D_4 \\ \hline & C_2 & C_{23} & & -{}^tA_2 & -{}^tA_{32} & D_5 \\ \hline & {}^tC_{23} & C_3 & & -{}^tA_{23} & -{}^tA_3 & {}^tA_{23} \\ \hline & & & & & & D_5 - A_2 \end{array}\right] \end{array} \oplus \begin{array}{ccc} l & l & 1 \\ \left[\begin{array}{c|c|c} -{}^tA_1 & -{}^tC_1 & \\ \hline -{}^tB_1 & A_1 & \\ \hline -{}^tD_1 & -{}^tD_4 & {}^tA_2 - {}^tD_5 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\cong (\mathfrak{sp}(l) \oplus \mathfrak{sp}(n-l)) \cdot \mathfrak{u}(2l+1).$$

$\mathfrak{g} - \mathfrak{v} = \dim((\mathfrak{sp}(l) \oplus \mathfrak{sp}(n-l)) \cdot \mathfrak{u}(2l+1))$ が成り立つから,

この場合も P. V. である.

② $(Sp(m) \times SL(2n+1) \times GL(1)^2,\ \square \otimes \square \oplus 1 \otimes$ 日,

$V(2m) \otimes V(2n+1) \oplus V(1) \otimes V(n(2n+1)))\quad (1 \le 2m \le 2n+1)$

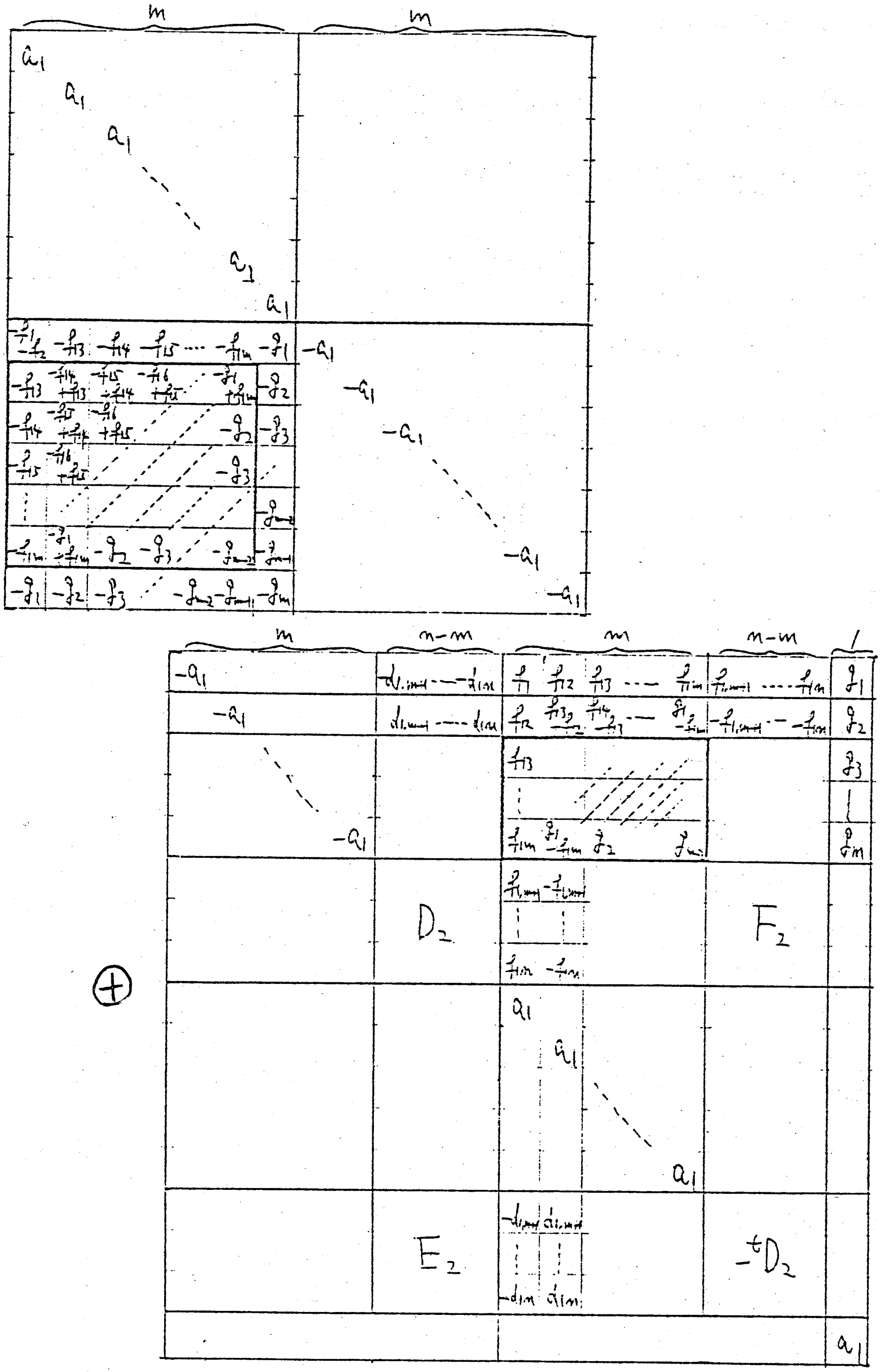
これの P. V. 性は $1 \otimes$ 日 における generic isotropy subgroup を考えることにより次の P. V. 性を調べることになる.

$$\left(Sp(m) \times \left[\begin{array}{c|c} Sp(n) & \begin{array}{c} * \\ \vdots \\ * \end{array} \\ \hline 0 & * \end{array}\right] \times GL(1),\ \square \otimes \square,\ V(2m) \otimes V(2n+1) \right)$$

まずスカラー倍 $GL(1)$ を除いて考える.

$$X_0 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overbrace{}^{n} & \overbrace{\phantom{I_{m-1}\ \ }}^{n} & \overbrace{}^{1} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c|c} I_m & & \\ \hline & I_{m-1} & \\ & & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \}\, m \\ \}\, m-1 \\ \}\, 1 \end{array} \in V(2m) \otimes V(2n+1) \text{ における}$$

isotropy subalgebra を求めてみると、



$\cong \ (\mathfrak{gl}(1) \oplus \mathfrak{sp}(n-m)) \cdot \mathfrak{u}(2m)$.

$g - v = \dim((\mathfrak{gl}(1) \oplus \mathfrak{sp}(n-m)) \cdot \mathfrak{u}(2m))$ が成り立つから これはスカラー倍の作用がなくてもP.V.である. したがって②も

P. V. である.

③ $(SL(2n+1) \times SO(m) \times GL(1)^2,\ \square\otimes\square \oplus \boxminus \otimes 1,$

$V(2n+1)\otimes V(m) \oplus V(n(2n+1))\otimes V(1))$ $(4 \leqq m \leqq 2n+1)$

これは命題より次の P. V. 性を調べればよい.

$(SL(m-1) \times (SO(m) \times Sp(n)) \times GL(1)^2,\ \square\otimes(\square + \square)$

$V(m-1)\otimes (V(m) \oplus V(2n)))$.

これの P. V. 性は $(SL(m-1) \times SO(m) \times GL(1),\ \square\otimes\square,\ V(m-1)\otimes V(m))$ における generic isotropy subgroup を考えることにより次と同値である.

$(SO(m-1) \times Sp(n) \times GL(1),\ \square\otimes\square,\ V(m-1)\otimes V(2n))$.

これは既約 P. V. の分類 (Sato-Kimura [1]) より, $m = 4$ のとき P. V. で, $m \geqq 5$ のときは P. V. ではない.

$m = 4$ のときに実際に generic isotropy subalgebra を求めてみる. $(SL(2n+1) \times SO(4) \times GL(1)^2,\ \square\otimes\square \oplus \boxminus\otimes 1,\ V(2n+1)\otimes V(4) \oplus V(n(2n+1))\otimes V(1))$ の $\boxminus\otimes 1$ における generic isotropy subgroup を考えることにより, 次の P. V. の generic isotropy subalgebra を求めればよい.

$$\left(\begin{bmatrix} Sp(n) & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix} \\ 0 & * \end{bmatrix} \times SO(4) \times GL(1),\ \square\otimes\square,\ V(2n+1)\otimes V(4) \right).$$

$$X_0 = {}^t\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overbrace{\qquad\qquad}^{n} & \overbrace{\qquad\qquad}^{n} & \overbrace{\ }^{1} \end{array} \\ \left.\begin{bmatrix} 1 \ \cdots & & \\ & 1 \ \cdots & 1 \\ \cdots \ 1 & & \\ & \cdots \ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\} 4 \end{array} \in V(2n+1)\otimes V(4) \text{ における}$$

isotropy subalgebraを求めてみると，

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & n-2 & 1 & 1 & n-2 & 1 & 1
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c}
 & {}^tD_5 & & -d_1-z & -{}^tD_2 & -d_1-z & d_1 \\ \hline
 & A_2 & & -D_2 & B_2 & -D_2 & D_2 \\ \hline
 & {}^tD_5 & & -d_1-z & -{}^tD_2 & -d_1-z & d_1 \\ \hline
z & & -z & & & & \\ \hline
 & C_2 & & -D_5 & -{}^tA_2 & -D_5 & D_5 \\ \hline
-z & & z & & & & \\ \hline
 & & & & & &
\end{array}\right)
\oplus
\left(\begin{array}{c|c|c|c}
 & -z & & z \\ \hline
z & & z & \\ \hline
 & z & & -z \\ \hline
z & & z &
\end{array}\right)
\oplus (\quad)
$$

$\cong \ \mathfrak{sp}(n-2) \cdot \mathfrak{u}(2(n-1))$.

$g - \nu = \dim(\ \mathfrak{sp}(n-2) \cdot \mathfrak{u}(2(n-1)))$ が成り立つから X_0 は generic な点となっている．したがって $\mathfrak{sp}(n-2) \cdot \mathfrak{u}(2(n-1))$ が求める generic isotropy subalgebra である．

以上の結果から☆がP. V. であるためには，$(G,\ \rho,\ V)$ が次の①，②，③のうちのどれかであることが必要十分である．

① $(\ SL(n),\ \square,\ V(n)\ )$

② $(\ Sp(n),\ \square,\ V(2n)\ )$

③ $(\ SO(4),\ \square,\ V(4)\ )$.

最後に，木村達雄先生には大変多くの事を教えていただきました．ここに心から感謝の意を表します．

参考文献

[1] M. Sato and T. Kimura, A Classification of Irreducible Prehomogeneous Vector Spaces and Their Relative Invariants, Nagoya Math. J. Vol. 65 (1977), 1–155.

[2] T. Kimura, A Classification of Prehomogeneous Vector Spaces of Simple Algebraic Groups with Scalar Multiples.